Remarque

Proposition
(1) Une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.
(2) Une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui engendrent $\mathbb{R}^n$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

1.8 Introduction aux applications linéaires

But
Le produit matrice - vecteur peut être vu comme une action sur les vecteurs. Nous allons interpréter les matrices commes des applications.

Exemple

Définition 20 (application/transformation)**.**
Une *application* ou *transformation* T de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ est une opération qui assigne à chaque vecteur de $\mathbb{R}^n$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Exemples

Définition 21 (application linéaire).
Une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est *linéaire* si

Exemples

Propriétés Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors T satisfait :

1.
2. Principe de superposition :

Remarque
Pour montrer la linéarité d'une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, il suffit de montrer qu'on a

$$T(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Matrice associée à une transformation linéaire

Exemple

Théorème 10. *Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors il existe une matrice A de taille $m \times n$ unique telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Preuve

Applications injectives et surjectives

Définition 22 (surjectivité)**.**
Une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite *surjective* si

Définition 23 (injectivité).
Une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite *injective* si

Remarques

Définition Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si T est à la fois injective et surjective, elle est dite *bijective*.

Théorème 11. *Soient $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A la matrice canoniquement associée. Alors les énoncés suivants sont équivalents*

1.

2.

3.

Théorème 12. *Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors*

Preuve